数理解析研究所講究録
295巻 1977年 38-45

正則函数 $f(x)$ の不変量 $L(f)$ と, $f^{-1}(0)$ の特異点の性質について.

京大数理研研修員　矢野　環

§0. はじめに.

$f:(\mathbb{C}^n,0)\to(\mathbb{C},0)$, $\mathcal{O}$: 正則函数の芽(との層),

$f_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $\mathfrak{a}=\sum_{i=1}^{n}\mathcal{O}f_i$.

広中, Lê-Ramanujam, 加藤(満生)等により, 次の定理が与えられている.

定理　f は $\mathfrak{a}$ 上 integral である。即ち, $^{\exists}a_i(x,\xi)$: $\mathcal{O}$係数の $(\xi_1,\cdots,\xi_n)$ の多項式で homogeneous i 次であり,

$$f^l+a_1(x,df)f^{l-1}+a_2(x,df)f^{l-2}+\cdots+a_l(x,df)=0$$

ここで, (又以下でも) df とはその係数 grad f と思う。

この定理により存在の保証される, f の $\mathfrak{a}$ 上の整従属次数を $l(f)$ と記す.

ところで，超曲面 $f^{-1}(0)$ の性質は，f^s のみたす偏微分方程式系と密接に関係している。即ち，$\mathcal{D}$ を正則函数係数の偏微分作用素の与（層），$\mathcal{D}[s]=\mathcal{D}\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{C}[s]$ として，

$$\mathcal{M}=\mathcal{D}[s]f^s=\mathcal{D}[s]/\mathcal{J}(s),$$

$$\mathcal{J}(s)=\{P(s)\in\mathcal{D}[s]\mid P(s)f^s=0\}.$$

が重要である。さらに，次の加群を定義する。

$$\widetilde{\mathcal{M}}=\mathcal{D}[s]/(\mathcal{J}(s)+\mathcal{D}[s](\mathfrak{m}+\mathcal{O}f)).$$

ここで，$L(f)$ を次の様に定義する。

$$\mathcal{J}(s)\ni^{\exists}Q(s)=s^{l}+\sum_{\lambda\geq 1}s^{l-\lambda}Q_{\lambda}(x,D),\quad \mathrm{ord}\,Q_{\lambda}\leq\lambda$$

である様な最少の l を **$L(f)$** と記す。$\sigma_k(P)$ により $P\in\mathcal{D}$ の k 階の表象をあらわすことにすれば，

$$Q(s)f^s=(s)_l\Big(f^{l}+\sum_{\lambda\geq 1}f^{l-\lambda}\sigma_{\lambda}(Q_{\lambda})(x,df)\Big)f^{s-l}+(s\text{につき }l-1\text{次以下})$$

$$(s)_l=s(s-1)\cdots(s-l+1)$$

であることより，次の不等式が成立する。

$$l(f)\leq L(f)$$

$l(f)=1$ の場合は，$L(f)=1$ でもあるが，一般には等号は成立しない。特定の f についての $L(f)$ の評価等については，[Y_1] を参照せよ。$f^{-1}(0)$ が原点を　　孤立特異点とする場合は，$l(f)=1$ であれば，実は座標変換により weighted homogeneous polynomial になることが知られており（斎藤恭司），$f^{-1}(0)$ は比較的簡単な構造をもつ。よって，$l(f)\geq 2$ の場合が興味ある

§1. $L(f)$ と $f^{-1}(0)$

以下 $f^{-1}(0)$ は $0\in\mathbb{C}^n$ を孤立特異点にもつとする。

$(f^{-1}(0),0)$ の不変量として, local monodromy map M はよく知られている。$M=S+N$, S: semi-simple, N: nilpotent とするとき, $N^n=0$, n: 空間次元 が知られている。$N^e=0$ となる初めての e は $L(f)$ と密接に関係している。但し, $L(f)$ (又 $l(f)$) は, 次元 n を一定にとておいても, いくらでも大きくなる様な f がある。

◎ $f=x^{n_1}+y^{n_2}+t\,x^{m_1}y^{n_2-1}$ t: non-zero parameter.

$$\frac{n_1-1}{k+1}\leq m_1\leq\frac{n_1-2}{k},\quad \frac{1}{n_2}<\frac{m_1}{n_1},\quad n_2\geq k+3.$$

f は non-quasi-homogeneous であるが (n_1,n_2,m_1) の条件から, 第3項は 前2項を weight $\left(\frac{1}{n_1},\frac{1}{n_2}\right)$ でみたものより高次である。従って, local monodromy は $X^{n_1}+Y^{n_2}$ のものと同じである。一方

$$l(f)\leq\left[\frac{k}{2}\right]+1,\qquad L(f)\leq k$$

が示される。($k=1,2,3,4$ までは, 上記の2式とも等号である。)

超曲面の不変量として, 重要なものに, b函数がある。それは, f が孤立特異点の場合は §0 で定義した $\widetilde{\mathcal{M}}$ における作用 s: $\overline{P(s)}\longmapsto\overline{sP(s)}$ ($\overline{}$ は $\mathcal{D}[s]$ の元の $\widetilde{\mathcal{M}}$ における class) の induce した s: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\widetilde{\mathcal{M}},\mathcal{B}_{pt})\longrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\widetilde{\mathcal{M}},\mathcal{B}_{pt})$

$\mathcal{B}_{pt}=\mathcal{D}\,\delta(x)$ の最小多項式を $\tilde{b}(s)$ とするとき,

$$b(s) = (s+1)\,\widetilde{b}(s)$$

と与えられる。$b(s)$ は local monodromy よりも強い不変量である。実際，f が $f = f_0 + g$，f_0 : weighted homogeneous isolated sing. g は f_0 の weight に関して高次のときは，M は不変であるが，$b(s)$ は変化する。今，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\widetilde{\mathfrak{m}}, \mathcal{B}_{pt})$ における，s の固有値 $\{-\alpha_1, \dots, -\alpha_\mu\}$ （ここで $\mu = \dim \mathcal{O}/\mathfrak{a}$，$\alpha_i > 0$ であることがわかる．又，α_i は重複もゆるして記[illegible]ている。）として，

$\widetilde{P}(t) = \sum_{i=1}^{\mu} t^{\alpha_i}$ としたとき，前頁の例についていうば次の様になる．$\widetilde{P}_0(t)$ を $x^{n_1} + y^{n_2}$ のそれ，$\widetilde{P}(t)$ を f のそれとすれば，

$$\widetilde{P}_0(t) = \frac{(t^{1/n_1} - t)(t^{1/n_2} - t)}{(1 - t^{1/n_1})(1 - t^{1/n_2})}$$

$$\widetilde{P}(t) = \widetilde{P}_0(t) + (1-t)\,t^{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}} \sum_{j=2}^{k} t^{j\left(\frac{m_1}{n_1}-\frac{1}{n_2}\right)} \frac{t - t^{1-j\frac{m_1}{n_1}}}{1 - t^{\frac{1}{n_1}}}$$

である．ここで，$\widetilde{P}(t)$ の二項に k があらわれていることに注意せよ．（$k=1$ の時は，Σ は空な和である。$k=2,3$ については上式は証明されており，$k \geq 4$ では予想である。）

$L(f) = 2$ の場合は，$\widetilde{\mathfrak{m}}$ の完全な構造，$b(s)$ の決定法等すべて [Y1] [Y2] 等にあらわされている。よって，$L(f) = 3$ の場合が，次の § であつかわれる。

§ $L(f)=3$.

我々は2つの場合を区別する.

$$\ell(f)=2, \quad L(f)=3.$$

$$\ell(f)=L(f)=3.$$

第一の場合, $\exists P(s)=s^2+sA+B\in \mathcal{J}(s)$,

$$P(s)f^s=a(x)sf^{s-1}$$

$$a(x)\notin \mathfrak{n}+\mathcal{O}f$$

となっていることがわかる。我々はこの場合を $(2,3;a)$ と表記する。一般の場合にもどり,

$(b_i(x))$ を ideal $(\mathfrak{n}^2+\mathfrak{n}f):f^2$ の basis とせよ.

$$\exists B_j(s)=b_j s^2+b_j^{(1)}s+b_j^{(2)}, \qquad \mathrm{ord}\, b_j^{(k)}\leq k$$

$$B_j(s)f^s=b_j^{(3)}(x)sf^{s-1},$$

となる $B_j(s)$ が構成される。ここで $b_j^{(3)}\notin \mathfrak{n}+\mathcal{O}f$, $j=1,\cdots,J$

$b_j^{(3)}=0$ $j=J+1,\cdots J+J'$ と仮定してよい. このとき,

$$b_j s f^{s+1}\equiv b_j^{(3)}f^s \qquad \mathrm{mod}\ \mathcal{D}(\mathfrak{n}+\mathcal{O}f)f^s$$

であることがわかる。さて, さらに $\mathfrak{n}+\mathcal{O}f : b_j^{(3)}=\sum_k \mathcal{O}b_{j,k}^{(4)}$,

$b_{j,k}=b_{j,k}^{(4)}\cdot b_j$ $(j\leq J)$, $b_{j,k}=b_j$ $(j>J)$ とおく. 我々は

$$B_{j,k}(s)=b_{j,k}s^2+b_{j,k}^{(1)}s+b_{j,k}^{(2)} \quad \in \mathcal{J}(s)$$

を構成することができる。一般には, さらに,

$$C_\ell(s)=C_\ell(x,D)s^2+C_\ell^{(1)}(x,D)s+C_\ell^{(2)}(x,D),$$

$\mathrm{ord}\, C_\ell\geq 1$, $\quad \mathrm{ord}(C_\ell)+2=\mathrm{ord}(C^{(2)})\geq \mathrm{ord}\, C_\ell^{(1)}+1$

という形の $g(s)$ の元が，$g(s)$ の生成元として必要である。

$(2,3;a)$ の場合，$b_{1,k}$，$b^{(1)}_{1,k}$，$b^{(2)}_{1,k}$，$B^{e}_{1,k}$ の代りに，

b_k，$b^{(1)}_k$，$b^{(2)}_k$，B_k と記すことにしよう．

次の定理は，$L(f)=3$ の場合の $\widetilde{\mathfrak{M}}$ の完全な構造を与える

定理. $L(f)=3$ の時，$\widetilde{\mathfrak{M}}$ は下記の表示をもつ．

1) case $(3,3)$ i.e. $l(f)=L(f)=3$.

$$0 \leftarrow \widetilde{\mathfrak{M}} \xleftarrow{\begin{pmatrix}1\\ s\\ s^2\end{pmatrix}} \mathcal{D}^3 \xleftarrow{\begin{pmatrix} f_i & & \\ f & & \\ b^{(3)}_j & & \\ & f & \\ a'_\nu & a_\nu & \\ b^{(2)}_{j,k} & b^{(1)}_{j,k} & b_{j,k} \\ c^{(2)}_\ell & c^{(1)}_\ell & c_\ell \end{pmatrix}} \mathcal{D}^N$$

2) case $(2,3;a)$

$$0 \leftarrow \widetilde{\mathfrak{M}} \xleftarrow{\begin{pmatrix}1\\ s\\ s^2\end{pmatrix}} \mathcal{D}^3 \xleftarrow{\begin{pmatrix} f_i & & \\ f & & \\ g & h & \\ a'_\nu & a_\nu & \\ b^{(2)}_k & b^{(1)}_k & b_k \end{pmatrix}} \mathcal{D}^{n+2+r+q}$$

ここで, (g,h) は $(0,f)$ としても, $(a,0)$ としてもよい。
さらに,

$$(\mathfrak{a}+\mathcal{O}f):a \supset \mathfrak{a}:f \supset \mathfrak{a}+\mathcal{O}f+\mathcal{O}a$$

が成立している.

$a'_\nu \; a_\nu$ とは, $\sum \mathcal{O}a_\nu(x) = \mathfrak{a}:f$ であり,

$$(a_\nu(x)s + a'_\nu(x,D))f^s = 0$$

となっているものである。

この構造定理より, 特に $(2,3;a)$ の場合に, 次の定理が導びかれる.

定理　$F = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(\widetilde{\mathfrak{m}}, \mathcal{B}_{pt})$ とする. F の μ 次元の basis を, 次の様にとることができる。

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_{\mu_3} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ u_1 \\ v'_1 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 \\ u_{\mu_2} \\ v_{\mu_2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix}, \cdots \begin{pmatrix} u_{\mu_1} \\ v_{\mu_1} \\ w_{\mu_1} \end{pmatrix} \right\}.$$

ここで $(u_1,\cdots,u_{\mu_i})$ は F_i の basis であり,

$$F_1 = \{u \in \mathcal{B}_{pt} \mid (\mathfrak{a}+\mathcal{O}f+\mathcal{O}a)u = 0\}$$

$$F_2 = \{u \in \mathcal{B}_{pt} \mid (\mathfrak{a}:f)u = 0\}$$

$$F_3 = \{u \in \mathcal{B}_{pt} \mid ((\mathfrak{a}+\mathcal{O}f):a)u = 0\}.$$

又, (v, v', w) は次の方程式から決定される。

$$\begin{cases} b_k v_i' + b_k^{(1)} u_i = 0, \\ a_\nu v_i + a_\nu' u_i = 0, \\ b_k w_i + b_k^{(1)} v_i + b_k^{(2)} u_i = 0. \end{cases}$$

定理　$\exists P(s, x, D) \in \mathcal{D}[s]$ s.t.

$$P(s, x, D) f^{s+1} = b(s) f^s,$$

$P(s,x,D) = \sum s^k P_k(x,D)$ としたとき、$\max_k(\mathrm{ord}\, P_k + k) = \deg b(s)$.

上記第1の系は，$L(f)=1/2$ の場合の自然な拡張であるが，$a(x)$ が重要な役割をはたすことが著しい。第2の系は $L(f)=1, 2$ の時と同じ性質をもつ $P(s)$ の存在を保証している。

証明にあたっては，先の定理の $(g, h) = (0, f)$，$(a, 0)$ がつかわれる。

$(2,3;a)$ の実例と，その構造については [Y1] [Y2] に詳しい。

[Y1] T. Yano On the theory of b-functions. : to appear in Publ. of RIMS.
[Y2] 〃 2 ; in prep.
[Y3] 〃 3 ; 〃.